

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

Design & Analysis of Algorithms

دانشگاه شهید باهنر کرمان - بخش مهندسی کامپیوتر

مدرس: حدیث محسنی

نیازی به تحویل تمرین‌ها نیست!

تمرین‌های سری اول

مسئله ۱.

با استفاده از استقرا ثابت کنید که به ازای هر $n > 1$ ، یک عدد n رقمی از اعداد ۱ و ۲ وجود دارد که بر 2^n بخشپذیر است.

مسئله ۲.

ثابت کنید هر عدد طبیعی $N > 3$ به طور یکتا به صورت جمع اعداد متفاوتی از دنباله فیبوناچی (که این دنباله شامل اعداد متوالی از دنباله فیبوناچی نیست) قابل نمایش است.

$$N = \sum_{j=1}^m F_{i_j}, \quad \|i_j - i_{j-1}\| \geq 2$$
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

برای مثال:

$$10 = 8 + 2 = F_6 + F_2, \quad 11 = 8 + 3 = F_6 + F_3, \quad 12 = 8 + 3 + 1 = F_6 + F_3 + F_1$$

مسئله ۳.

در مسئله کد گری هدف کمینه کردن اختلاف بین دو کد متوالی بود. در مسئله “ضد-گری” هدف بیشینه کردن اختلاف بین بیت‌های دو کد متوالی است. آیا می‌توان یک روش کد گذاری برای تعداد زوجی حالت طراحی کرد که در یک کد k بیتی، اختلاف بین کدهای دو عنصر متوالی k شود؟ آیا این اختلاف می‌تواند $k-1$ باشد؟ و یا ترکیبی از k و $k-1$ ؟!

مسئله ۴. ادغام لیست‌های اسامی دانش‌آموزان

مدرسه‌ای تازه تاسیس دارای k کلاس در پایه‌ی اول ابتدایی است. هر کلاس این مدرسه، دارای n دانش‌آموز است که اسامی آنها در یک لیست بر اساس حروف الفبا مرتب شده است (یعنی k لیست مرتب شده داریم). در انتهای سال، مدیر مدرسه می‌خواهد که یک لیست کلی مرتب شده از اسامی این دانش‌آموزان تهیه کند و آن را برای اداره آموزش و پرورش ارسال کند (واضح است که طول لیست کلی برابر nk خواهد بود). برای تهیه این لیست، یک مهندس دو راه‌حل پیشنهاد کرده است:

۱. ابتدا اسامی لیست‌های اولین و دومین کلاس را با هم ترکیب کنیم و سپس لیست ترکیب شده را با لیست

اسامی سومین کلاس و سپس حاصل را با لیست اسامی چهارمین کلاس و الی آخر ترکیب کنیم.

۲. الگوریتمی با زمان اجرای کمتر و با استفاده از روش تقسیم و حل!

الف) زمان اجرای الگوریتم اول را به دست بیاورید.

ب) الگوریتم مبتنی بر تقسیم و حل که مهندس فوق در نظر داشته را حدس زده و زمان اجرای آن را به دست آورید.

مسئله ۵. عضو غالب در آرایه

در یک آرایه‌ی n عنصری، عضو غالب به عنصری اطلاق می‌شود که در بیش از $\frac{n}{4}$ خانه از خانه‌های آرایه تکرار شده باشد. برای مثال در آرایه‌ی ۷ عنصری ۱، ۵، ۳، ۵، ۳، ۵، ۵ عدد ۵ چهار بار در آرایه تکرار شده است ($\frac{7}{4} > 4$) و عضو غالب است. (توجه داشته باشید که در آرایه‌ی ۶ عنصری هم عضو غالب باید در حداقل ۴ خانه آرایه تکرار شده باشد تا شرط $\frac{n}{4} > 4$ برقرار باشد.)

با استفاده از روش تقسیم و حل، الگوریتمی با $O(n \log n)$ برای پیدا کردن عضو غالب در آرایه ارائه کنید. الگوریتم شما باید تشخیص دهد آیا آرایه‌ی داده شده دارای عضو غالب هست یا نه و در صورت وجود عضو غالب، آن را پیدا کند.

توجه: در الگوریتم پیشنهادی شما نمی‌توانید آرایه را مرتب کنید و یا ترتیب عناصر آرایه را عوض کنید. فقط می‌توانید دو خانه از آرایه را با یکدیگر مقایسه کنید.

با آرزوی موفقیت! ☺