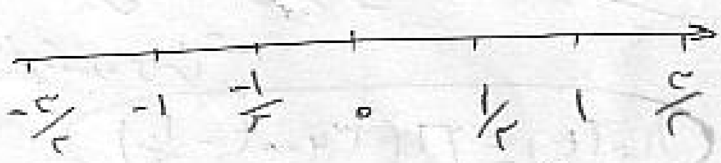
مثال ۱۵ در یک سیستم PAM باینری دیجیتال ورودی آشکارساز به فرم زیر است

$y_m = a_m + i_m + n_m$ که $a_m = \pm 1$ و n_m نویز گوسی با متوسط صفر و واریانس σ_N^2 است و i_m نیز ISI ناشی از اعوجاج کانال است. ISI یک متغیر تصادفی را است که مقادیر $-\frac{1}{2}$، 0 و $\frac{1}{2}$ را با احتمال $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ دارد. احتمال خطای این آشکارساز را بیابید.

جواب: ما داریم

$$y = \begin{cases} a + n - \frac{1}{2} & , \ p = \frac{1}{4} \\ a + n + \frac{1}{2} & , \ p = \frac{1}{4} \\ a + n & , \ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$



همانطور که در بالا دیده می‌شود به دلیل تقارن وضعیت ۱ و ۱- با هم برابر است.
سپس گیرنده بهینه همان روش آستانه است که آستانه آن صفر است.

$$P_e = p(e|a=1)\,p(a=1) + p(e|a=-1)\,p(a=-1)$$

$$= \frac{1}{2} p(e|a=1) + \frac{1}{2} p(e|a=-1)$$

به دلیل تقارن $p(e|a=-1) = p(e|a=1)$ پس

$$\boxed{P_e = p(e|a=-1)}$$

$$P_e = p(e|a=-1) = p(n+a+i>0|a=-1)$$

$$= p(i=-\tfrac{1}{2})\,p(n-\tfrac{3}{2}>0) + p(i=0)\,p(n-1>0) + p(i=\tfrac{1}{2}) \times p(n-\tfrac{1}{2}>0)$$

$$= \frac{1}{4} p(n>\tfrac{3}{2}) + \frac{1}{2} p(n>1) + \frac{1}{4} p(n>\tfrac{1}{2})$$

همچنین برای $N(0, \sigma^2)$ داریم.

$$p(n>b) = Q\left(\frac{b}{\sigma_N}\right)$$

پس

$$P_e = \frac{1}{4} Q\left(\frac{3}{2\sigma_N}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\frac{1}{2\sigma_N}\right)$$

۶) سوال) اگر دنباله $\{a_n\}$ متغیرهای باینری تصادفی مستقل با مقادیر ± 1 با احتمال یکسان باشند. این متوالی نوسان (پالس) $g(t)$ برای مدولاسیون استفاده می‌کنیم، سیگنال مدوله شده برابر است با:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT)$$

a- طیف $x(t)$ را بیابید.

b- اگر $g_1(t)$ بجای $g(t)$ استفاده شود طیف چگونه خواهد بود؟ ($g_1(t)=g(\frac{t}{2})$ و $g(t)$ پالس مستطیلی است بعرض T)

c- می‌خواهیم یک نول در $f=\frac{1}{4T}$ داشته باشیم و از پیش کدینگ $b_n=a_n+\alpha a_{n-1}$ استفاده می‌کنیم. α را بیابید.

d- آیا امکان این هست با پیش کدینگ $b_n=a_n+\sum_{i=1}^{N}\alpha a_{n-i}$ و N محدود، را یافت که طیف در فاصله $\frac{1}{4T}<|f|<\frac{1}{2T}$ برابر صفر شود.

$$S_x(f)=\frac{\overline{a_n^2}}{T}|G_T(f)|^2 \;\Rightarrow\; S_x(f)=\frac{1}{T}|G_T(f)|^2$$

a —

$$\overline{a_n^2}=(-1)^2\times\frac{1}{2}+(1)^2\times\frac{1}{2}=1 \quad , \quad G_T(f)=AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$S_x(f)=\frac{(AT)^2\,\mathrm{sinc}^2(fT)}{T}=A^2T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

b —

$$S_x(f)=A^2(2T)\,\mathrm{sinc}^2(2fT)=2A^2T\,\mathrm{sinc}^2(2fT)$$

c —

$$b_n=a_n+\alpha a_{n-1} \Rightarrow R_b(0)=E(a_n+\alpha a_{n-1})^2=E(a_n)^2+E(\alpha^2 a_{n-1}^2)$$
$$+2\alpha E(a_n a_{n-1})=\overline{a_n^2}+\alpha^2\overline{a_{n-1}^2}+2\alpha\,\cancel{E(a_n)E(a_{n-1})}=1+\alpha^2$$

$$R_b(1)=E(b_n b_{n+1})=E(a_n+\alpha a_{n-1})(a_{n+1}+\alpha a_n)=\cancel{E(a_n a_{n+1})}$$
$$+E(\alpha a_n^2)+\cancel{E(\alpha a_{n-1}a_{n+1})}+\cancel{E(a_n\,\alpha a_{n-1})}=\alpha E(a_n^2)=\alpha$$

$$R_b(-1)=R_b(1)=\alpha$$

$$\underset{m\geq 2}{R_b(m)}=E(a_n+\alpha a_{n-1})(a_{n+m}+\alpha a_{n+m-1})=0 \Rightarrow$$

$$R_b(m)=\begin{cases}1+\alpha^2 & , m=0\\ \alpha & , m=\pm 1\\ 0 & \text{oth}\end{cases} \Rightarrow S_b(f)=1+\alpha^2+2\alpha\cos(2\pi fT)$$

$$S_b(f)\Big|_{f=\frac{1}{4T}}=0 \Rightarrow 1+\alpha^2+2\alpha\cos(2\pi\times\frac{1}{4T})=0 \Rightarrow 1+\alpha^2=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=\sqrt{-1}}$$

$$S_x(f)=\frac{1}{T}S_b(f)|G_T(f)|^2$$

d- خیر چون تعداد صفرهای $S_b(f)$ محدود است و نمی‌توان یک بازه پیوسته از آن را برابر صفر قرار داد.

مثال ۴) یک PAM چهار سطحی (4-ary) برای ارسال در نرخ 7200 bps استفاده می‌شود و فیلتر شکل دهنده دارای پاسخ ضربه برابر $h_T(t)=\Pi(\frac{t}{T_s}-\frac{1}{2})$ است که T_s دوره سمبل است. فیلتر گیرنده $h_R(t)$ نیز با فیلتر فرستنده منطبق است (از نوع واقعه) و پاسخ ضربه کانال برابر با

$$H_c(f)=\frac{1}{1+j\frac{2\pi f}{1200}}$$

ISI این سیستم مخابراتی را تعیین کنید.

حل:

4-ary PAM دارای $2\ \text{bit}/\text{symbol}$ ارسال می‌کند پس نرخ سمبل برابر $\frac{7200}{2}=3600\ \frac{\text{symbol}}{\text{sec}}$ است، بنابراین فیلتر فرستنده برابر با $T_s=\frac{1}{r_s}=\frac{1}{3600}\ \text{sec}$

$$h_T(t)=\Pi(3600t-\tfrac{1}{2})$$

کانال علی است بنابراین پاسخ ضربه کانال برابر با

$$h_c(t)=1200\exp(-1200t)u(t)$$

$h_R(t)$ دارای انرژی واحد بوده و با پالس ارسالی منطبق است

$$h_R(t)=\frac{1}{\sqrt{T_s}}h_T(t)=60\,\Pi(3600t-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{T_s}}h_R(T_s-t)$$

پس فیلتر موثر از ورودی تا خروجی برابر کانولوشن این ۳ مورد است

$$p(t)=h_T(t)*h_c(t)*h_R(t)=h_c(t)*(h_T(t)*h_R(t))$$

$$=60\,h_c(t)*(\underbrace{h_T(t)*h_T(t)}_{\text{مثلثی}})=(60\,\Lambda(3600t-1))*h_c(t)$$

$$=(60\,\Lambda(3600t-1))*(1200\exp(-1200t)u(t))$$

اگر سمبل‌های ارسالی a_k باشند خروجی گیرنده برابر با

$$r(t)=\sum_k a_k\,p(t-kT_s)+n_0(t)\Rightarrow$$

در لحظات نمونه برداری $t_m=mT_s$ داریم:

$$r(mT_s)=\sum_k a_k\,p(mT_s-kT_s)+n_0(t_m)=\sum_k p_{m-k}a_k+n_m$$

که در آن p_n برای $n<0$ چون هر دو تابع کانوولو شونده صفر هستند برابر صفر است و برای $n\ge 0$ داریم

$$p_n=p(nT_s)=p(\tfrac{n}{3600})=\int^{\frac{1}{1800}}72000\,\Lambda(3600t-1)\exp(-1200(\tfrac{n}{3600}-t))\times u(\tfrac{n}{3600}-t)\,dt$$

سوال ۴) یک سیگنال آنالوگ پهنای باند ۴ کیلوهرتز داشته و نرخ نمونه برداری ۱.۲۵ برابر نرخ نایکوئیست است ⑤
هر نمونه سطح کوانتیزاسیون ۲۵۶ سطحی دارد. اگر نمونه ها مستقل باشند
الف- نرخ اطلاعات این منبع چقدر است؟
ب- آیا در یک کانال با پهنای باند $10KHz$ و $SNR = 20dB$ امکان ارسال بدون خطا وجود دارد؟
ج- میزان SNR مورد نیاز برای ارسال بدون خطا را بیابید
د) اگر SNR خروجی $20dB$ باشد پهنای باند مورد نیاز جهت ارسال بدون خطا را بیابید.
حل:

$f_m = 4KHz = 4000\,Hz \Rightarrow$ نرخ نایکوئیست $= 2\times f_m = 2\times 4000 = 8000\ \frac{sample}{sec}$

$r = 8000\times 1.25 = 10000\ sample/sec$

$H(X) = \log_2 M = \log_2 256 = 8\ b/sample$

$R = rH = 8\times 10000 = 80\ \frac{kb}{s}$

ب-

$C = B\log_2(1+SNR) = 10^4\log_2(1+100) = 66.6\ \frac{kb}{s}$

$C < R \Rightarrow$ ارسال بدون خطا ممکن نیست.

ج-

$C = 10^4\log_2(1+SNR) \geq 8\times 10^4 \Rightarrow \log(1+SNR) \geq 8 \Rightarrow$

$1+SNR \geq 2^8 = 256 \Rightarrow \boxed{SNR \geq 255 = 24.1\,dB}$

د-

$C = B\log(1+SNR) \geq 8\times 10^4 \Rightarrow B\log_2(1+100) \geq 8\times 10^4$

$\Rightarrow B \geq \frac{8\times 10^4}{\log_2 101} = 12KHz$

سوال) سیستم PAM طراحی کنید. نرخ ارسال آن $r_b = 3600bps$ ، $P_e < 10^{-4}$ بوده و
$H_c(f) = 10^{-2} = \frac{1}{L}$ برای $|f| < 2400\,Hz$ و برای سایر مقادیر صفر است. $\frac{\eta}{2} = 10^{-14}\ \frac{Watt}{Hz}$ است.

$\frac{r_b}{2} + \frac{\alpha r_b}{2} = BW \Rightarrow 1800 + \alpha\times 1800 = 2400 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$

پس یک فیلتر Raised cosine با $\alpha = \frac{1}{3}$ در فیلتر متناظر برابر است با

$$S_R(f) = \begin{cases} \frac{1}{2400} & , |f| < (1-\alpha)\frac{r_b}{2} < 1200 \\ \frac{1}{2400}\cos^2\left[\frac{\pi}{2400}(|f|-1200)\right] & , 1200 < |f| < 2400 \\ 0 & oth \end{cases}$$

$$|H_T(f)| = K_1 |S_R(f)|^{\frac{1}{2}}, \quad |H_R(f)| = |S_R(f)|^{\frac{1}{2}}$$

فیلترها تخت شدند، و گیرنده برابر با
با فرض فیلتر منطبق

$$|H_C(f)||H_R(f)||H_T(f)| = |S_R(f)| \Rightarrow \overset{\text{در}}{f=0} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2400}}}_{H_T(f)} \times K_1 \times \underbrace{10^{-2}}_{H_C(f)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2400}}}_{H_R(f)} = \frac{1}{2400}$$

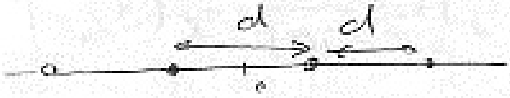
$$\Rightarrow \boxed{K_1 = 100}$$

$$P = 2Q\left(\sqrt{\frac{S_T T}{N_0/2\, L^2}}\right) < 10^{-4} \Rightarrow \frac{S_T T}{N_0/2\, L^2} \geq 14 \Rightarrow$$

$$S_T \geq \frac{14 \times N_0/2 \times L^2}{T} = 2400 \times 14 \times 10^{-14} \times \frac{1}{10^{-4}} = 2/4 \times 1/4 \ \mu watt$$

$$\Rightarrow \boxed{S_T \geq 5 \mu watt}$$

۱- انرژی متوسط سیگنالهای MPAM را بدست آورید دامنه این سیگنالها از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$A_m = (2m-1-M)\frac{d}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} s_m^2 = \frac{d^2}{4M}\left(\sum_{m=1}^{M}(2m-1-M)^2\right) \underbrace{E_g}_{\text{انرژی پالس اصلی}}$$

$$= \frac{d^2 E_g}{4M}\sum_{m=1}^{M}\left[4m^2 + (M+1)^2 - 4m(M+1)\right]$$

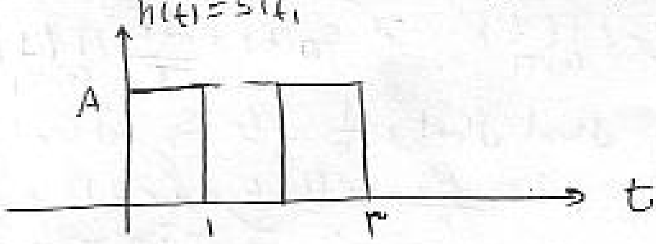
$$= \frac{d^2 E_g}{4M}\left(4\sum_{m=1}^{M} m^2 + M(M+1)^2 - 4(M+1)\sum_{m=1}^{M} m\right)$$

$$= \frac{d^2 E_g}{4M}\left(4\frac{M(M+1)(2M+1)}{6} + M(M+1)^2 - 4(M+1)\frac{M(M+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{d^2 E_g}{4}\left(\frac{2(M+1)(2M+1)}{3} + (M+1)^2 - 2(M+1)^2\right)$$

$$= \frac{M^2-1}{3}\frac{d^2}{4}E_g = \mathcal{E}_{av}$$

مثال ۷) یک سیستم PAM با ضریب ±۱ (باینری دو سطحی) و سیگنال ارسالی آن $m(t)=s(t)$



چگالی طیف توان نویز $\frac{N_0}{2}$ است. اگر سیگنال دریافتی به صورت $r(t)=s(t)+n(t)$ باشد

الف - پاسخ ضربه فیلتر منطبق را بیابید.

ب - خروجی فیلتر منطبق به ورودی $s(t)$ را رسم کنید.

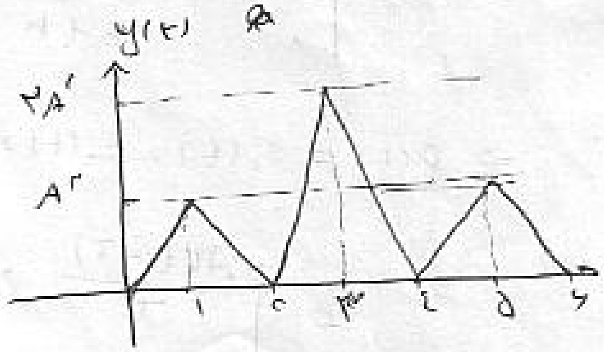
ج - واریانس نویز در لحظه $t=3$ را بدست آورید.

د - احتمال خطای این سیستم چقدر است؟

الف - $h(t)=s(T-t)=s(3-t)=s(t)$ T مدت زمان $s(t)$

ب - $y(t)=s(t)*h(t)=\int_0^t s(\lambda)s(t-\lambda)d\lambda \Rightarrow$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ A^2 t & 0\le t<1 \\ A^2(2-t) & 1\le t<2 \\ 2A^2(t-2) & 2\le t<3 \\ 2A^2(4-t) & 3\le t<4 \\ A^2(t-4) & 4\le t<5 \\ A^2(6-t) & 5\le t<6 \\ 0 & t\ge 6 \end{cases}$$



$$n_T=\int_0^T n(\lambda)h(T-\lambda)d\lambda=\int_0^T n(\lambda)s(T-\lambda)d\lambda=\int_0^T s(\lambda)n(T-\lambda)d\lambda$$

$$\sigma_{n_T}^2=E\left[\int_0^T\int_0^T s(\lambda)s(v)n(T-\lambda)n(T-v)d\lambda dv\right]$$

$$=\int_0^T\int_0^T s(\lambda)s(v)E(n(T-\lambda)n(T-v))d\lambda dv$$

$$=\int_0^T\int_0^T s(\lambda)s(v)\frac{N_0}{2}\delta(\lambda-v)d\lambda dv=\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{N_0}{2}\times 2A^2=\boxed{N_0A^2=\sigma_n^2}$$

د) می‌دانیم که احتمال خطای PAM برابر است با:

$$P_e=Q\left(\sqrt{\left(\frac{S}{N}\right)_0}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{[y(T)]^2}{N_0A^2}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{(2A^2)^2}{N_0A^2}}\right)$$

$$=Q\left(\sqrt{\frac{4A^2}{N_0}}\right)$$

مثال ۸) یک سیستم باینری باند پایه با سیگنال ارسالی $s_1(t) = A\Pi_{(0,T)}(t)$ و $s_0(t) = \frac{At}{T}\Pi_{(0,T)}(t)$ که $\Pi_{(0,T)}(t)$ برابر یک در بازه $[0,T]$ است و در سایر نقاط صفر است. اگر احتمال ارسال s_1 برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال ارسال s_0 برابر $\frac{2}{3}$ باشد و $r(t) = s_m(t) + n(t)$ ، $m \in \{0,1\}$ که n نویز گوسی با چگالی $\frac{N_0}{2}$ باشد

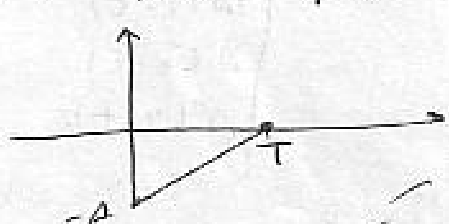
الف - گیرنده منطبق را رسم کرده و پاسخ ضربه فیلتر منطبق را بدست آورید.
ب - آستانه بهینه را بیابید.

$$h(t) = p(T_0 - t) = s_1(T_0 - t) - s_0(T_0 - t)$$

$$s_0(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & oth \end{cases}, \quad s_1(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} & 0 \le t \le T \\ 0 & oth \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(t) = s_1(t) - s_0(t) = \begin{cases} \frac{At - AT}{T} & 0 \le t \le T \\ 0 & oth \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{A(t-T)}{T}, & 0 \le t \le T \\ 0 & oth \end{cases}$$



- در حالتی که انرژی دو سیگنال برابر نیست th را پیدا کردیم اما در حالتی که با فرض احتمال نامساوی و شکل سیگنال‌ها داریم

$$th = \frac{E_1 - E_0}{2} - \frac{N_0}{2}\ln\frac{P_0}{P_1} = \frac{A^2T}{3} + \frac{N_0 \ln 2}{2}$$

مثال ۹) کانال تلفنی دارای مشخصه فرکانسی میان‌گذر $300 < f < 3000\,Hz$ است. هدف ارسال به صورت M-ary است. میزان M برای رسیدن به نرخ 9600bps را بدست آورید و ضریب α در صورت استفاده از پالس (raised cosine)

$$W = 3000 - 300 = 2700\,Hz$$

$$M = 2^k \Rightarrow k = 4 \Rightarrow M = 16 \Rightarrow R = \frac{9600}{4} = 2400 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2400}$$

سیگنال میانگذر است

$$(1+\alpha)\frac{r_s}{2} = \frac{W}{2} \Rightarrow \frac{(1+\alpha)}{2T} = \frac{W}{2} \Rightarrow \frac{(1+\alpha)\times 2400}{2} = \frac{2700}{2}$$

$$\Rightarrow 1200(1+\alpha) = 1350 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.125}$$

حالت ~~...~~ نصف پهنا را نیز پوشش داده است