بنام خدا: حل تمرین سری نهم فرآیندهای اتفاقی

۱- فرآیند $u(n)$ که AR مرتبه ۲ را در نظر بگیرید معادله دیفرانس آن بصورت زیر است

که $v(n)$ فرآیند نویز سفید با میانگین صفر و واریانس ۰/۵ است.

$$u(n) = u(n-1) - 0.5u(n-2) + v(n) \quad ①$$

الف- این معادله را برای توابع خودهمبستگی $r(1)$ و $r(2)$ حل کنید

ب- واریانس $u(n)$ را پیدا کنید.

با ضرب کردن معادله ① در $u^*(n-l)$ و گرفتن $E\{.\}$ داریم

اگر فیلتری که $v(n)$ را به $u(n)$ تبدیل می‌کند $h(n)$ باشد در این صورت

$$u(n) = h(n) * v(n) = \sum h(k)v(n-k)$$

$$= h(0)v(n) + h(1)v(n-1) + \dots \Rightarrow$$

$$u(n-l) = h(0)v(n-l) + h(1)v(n-l-1) + \dots$$

چون تک تک اجزای طرف دوم به ازای $l \geq 1$ بر $v(n)$ عمود است مجموع آنها نیز عمود است پس $v(n) \perp u(n-l)$

$$\Leftrightarrow r(l) = r(l-1) - 0.5r(l-2) + E\{v(n)u^*(n-l)\} \quad ②$$

$$l=1 \Rightarrow r(1) = r(0) - 0.5r(-1) + 0$$

$$l=2 \Rightarrow r(2) = r(1) - 0.5r(0)$$

فرآیند حقیقی است پس $r(1) = r(-1)$ پس داریم:

$$l=1 \Rightarrow r(0) - 0.5r(1) = r(1) \Rightarrow r(1) = \frac{r(0)}{1.5} = \frac{2\sigma_u^2}{3}$$

$$l=2 \Rightarrow r(1) - 0.5r(0) = r(2) \Rightarrow r(2) = \frac{2}{3}\sigma_u^2 - \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{6}$$

ب- طرفین رابطه ① را در $v^*(n)$ ضرب کرده و $E\{.\}$ می‌گیریم:

$$E\{u(n)v^*(n)\} = \cancel{E\{u(n-1)v^*(n)\} - 0.5E\{u(n-2)v^*(n)\}} + \sigma_v^2$$

$$E\{u(n)v^*(n)\} = \sigma_v^2 \quad ③$$

با قرار دادن $l=0$ در معادله ② و استفاده از ③ داریم

$$r(0) = r(-1) - 0.5r(-2) + E\{u^*(n)v(n)\} = r(1) - 0.5r(2) + \sigma_v^2$$

$$\Rightarrow r(0) = \sigma_u^2 = r(1) - 0.5r(2) + 0.5 = \frac{2}{3}\sigma_u^2 - \frac{1}{12}\sigma_u^2 + 0.5 \Rightarrow \boxed{\sigma_u^2 = 1.2}$$

۲- فرآیند MA ی $u(n)$ که از مرتبه ۲ می‌باشد توسط معادله دیفرانس زیر توصیف می‌شود:

$$x(n) = v(n) + 0.75v(n-1) + 0.25v(n-2)$$

که $v(n)$ نویز سفید با میانگین صفر و واریانس واحد است. می‌خواهیم آن را با یک فرآیند AR از مرتبه M تقریب بزنیم. تقریب را برای $M=2$، $M=5$ و $M=15$ بدست آورید.

مرتبه فرآیند AR چقدر باشد تا دقیقا برابر با فرآیند MA شود.

MA

$$\xrightarrow[\text{نویز سفید}]{v(n)} \boxed{1 + 0.75z^{-1} + 0.25z^{-2}} \longrightarrow x(n)$$

این دو سیستم باید رفتار مشابه داشته باشند

خروجی‌ها یکسان شوند. بنابراین

AR(M)

$$\xrightarrow[\text{نویز سفید}]{v(n)} \boxed{\frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots}} \longrightarrow u(n)$$

$$M=2 \Rightarrow 1 + 0.75z^{-1} + 0.25z^{-2} \cong \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \Rightarrow$$

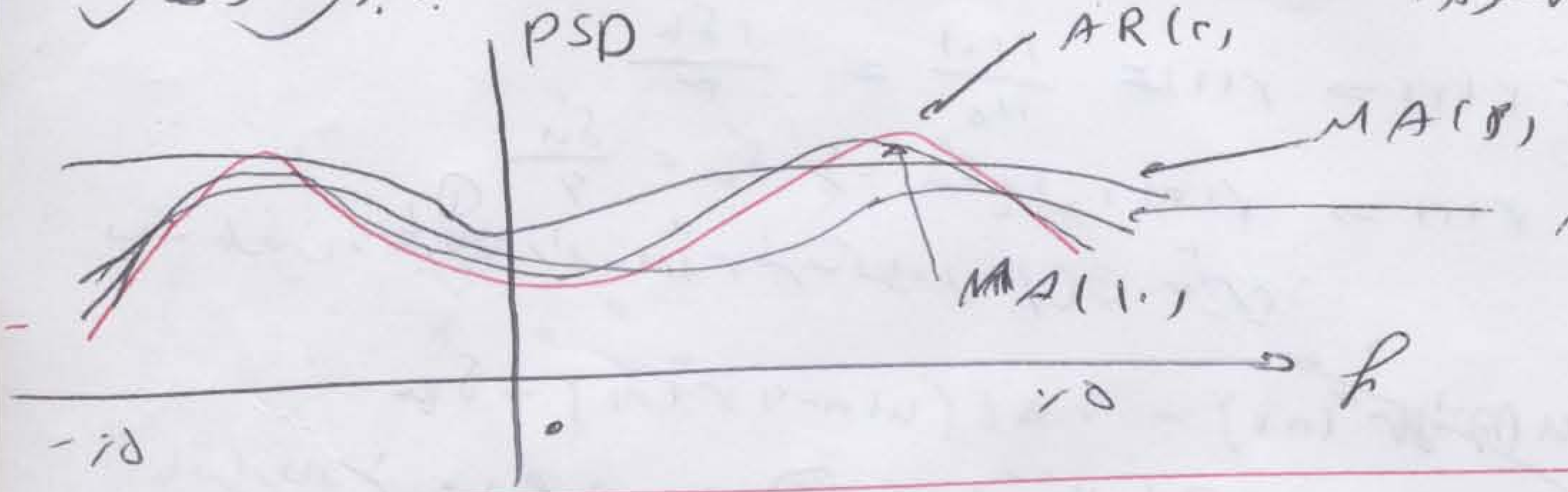
$$1 \cong 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + 0.75z^{-1} + 0.75a_1z^{-1}z^{-1} + 0.75a_2z^{-2}z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.25a_1z^{-1}z^{-2}$$
$$+ 0.25a_2z^{-2}z^{-2}$$

$\Rightarrow a_1 + ٠/٧۵ = ٠ \Rightarrow a_1 = -٠/٧۵$ و $a_2 + ٠/٧۵\, a_1 + ٠/٢۵ = ٠ \Rightarrow \boxed{a_2 \approx ٠/٣١٢۵}$

یک صفر نیز وجود دارد که شامل ضرایب z^{-2} به بالاتر است. برای M های بالاتر به همین صورت ضرب ترم را به صورت زیر حل می‌شود

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٠ & \cdots & \\ ٠/٧۵ & ١ & \cdots & \\ ٠/٢۵ & ٠/٧۵ & ١ & ٠ \cdots \\ ٠ & ٠/٢۵ & ٠/٧۵ & ١ \\ & & & \ddots \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -٠/٧۵ \\ -٠/٢۵ \\ ٠ \\ \vdots \\ ٠ \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow a = A^{-1} b$$

هرچه M بزرگتر می‌شود رفتار دو ترم بیشتر به هم شباهت پیدا می‌کنند. با رسم کامپیوتری دیده می‌شود که برای $M > 14$ مقدار دو تابع تقریباً یکسان هستند و ضرایب تقریباً با ... کوچک و قابل صرف‌نظر کردن است. اساساً از نظر تئوری اگر فرآیند AR داشته باشیم که قطب‌هایش درون دایره واحد قرار داشته باشند یعنی پایدار باشد و بخواهیم MA ای معادل آن را بدست آوریم از مرتبه بینهایت خواهد شد البته برای توان‌های بالا $a_m z^{-m}$ به صفر نزدیک می‌شوند.



۳- اگر $(x_1, \ldots, x_n)$ نمونه‌های تصادفی از متغیر تصادفی X با binomial با پارامترهای (m, p) باشد که m معلوم و p نامشخص است. تخمین حداکثر شباهت (ML) p را بیابید.

می‌دانیم که

$$L(\theta_{ML}) = \max_{\theta} (L(\theta)) = \max_{\theta} \left[f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \right]$$

و برای binomial

$$L(p) = f(x_1, x_2, \ldots; p) = \binom{m}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{(m-x_1)} \cdots \binom{m}{x_n} p^{x_n} (1-p)^{(m-x_n)}$$

$$= \binom{m}{x_1}\binom{m}{x_2}\cdots\binom{m}{x_n} p^{\sum_1^n x_i} (1-p)^{\left(mn - \sum_1^n x_i\right)}$$

$\Rightarrow$ با گرفتن لگاریتم از $L(p)$ داریم چون لگاریتم تابعی صعودی (اکیداً) یکنوا است پس داریم

$$\ln L(p) = \ln c + \left(\sum x_i\right) \ln p + \left(mn - \sum x_i\right) \ln(1-p), \quad c = \prod \binom{m}{x_i} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{1}{p} \sum_1^n x_i - \frac{1}{1-p}\left(mn - \sum_1^n x_i\right) \quad \text{و} \quad \frac{d}{dp} \ln(p) = ٠ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{p}_{ML}} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{1-\hat{p}_{ML}} \left(mn - \sum_{i=1}^n x_i\right) \Rightarrow \hat{p}_{ML} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{p}_{ML} = \frac{1}{mn} \sum x_i = \frac{1}{m} \bar{x}}$$

۴) اگر $R_{ss}(n)=a^n$ مطلوب است بهترین تخمین خطی $s(n)$ برحسب N مشاهده قبلی یعنی

$$\hat{s}(n)=h_1 s(n-1)+h_2 s(n-2)+\dots+h_N s(n-N) \Rightarrow$$

$E\{(s-\hat{s})^2\}$ بایستی حداقل شود با مشتق گیری نسبت به h_i ها به روابط زیر می‌رسیم

$$E\{s-h_0-\sum_{i=1}^{n} h_i x(i)\}=0 \Rightarrow h_0=\mu_s-\sum_{i=1}^{n} h_i \mu_{x(i)}$$

$$E\{[s-h_0-\sum_{i=1}^{n} h_i x(i)]\, x(i)\}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} h_i\, C_{xx}(i,j)=\delta_{sx}(j) \quad j=1,\dots,N \ (1)$$

چون متوسط صفر است روابط (1) بصورت زیر است که ماتریس روابط (1) بصورت زیر است ($X(N)=s(n-N)$...)

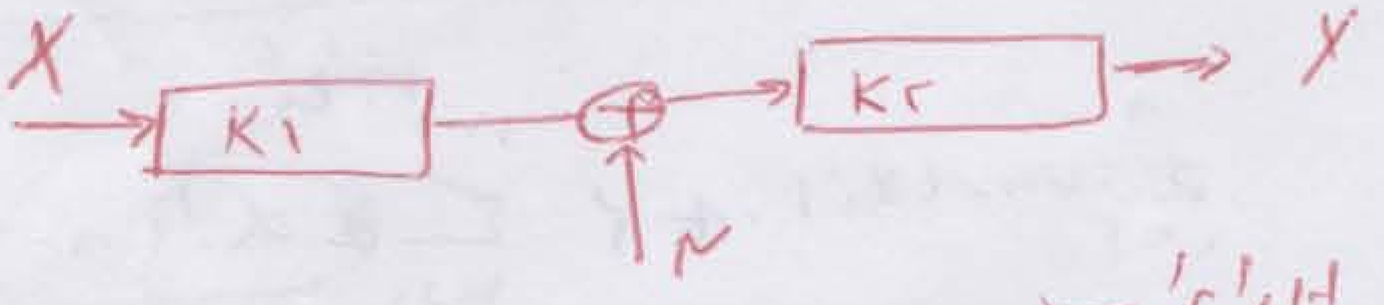
$$\begin{bmatrix} R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & \dots & R_{ss}(N-1) \\ R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & \dots & R_{ss}(N-2) \\ \vdots & & & \\ R_{ss}(N-1) & \dots & \dots & R_{ss}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss}(1) \\ R_{ss}(2) \\ \vdots \\ R_{ss}(N) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{N-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{N-2} \\ \vdots & & & & \\ a^{N-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{bmatrix} \Rightarrow h=[a,0,\dots,0]^T \Rightarrow$$

در واقع نوعی تخمینگر نوع مارکوف است.

$$\hat{s}(n)=a\,s(n-1)$$

۵- فرض کنید X و N فرایندهای WSS با متوسط صفر پیوسته زمانی با $R_{XN}=0$ باشند فرایندها ورودی سیستم زیر هستند در ادامه $K_1(\omega)\neq 0$ سیستم نیز LTI است.



الف- چگالی طیف توان خروجی $S_Y(\omega)$ را بیابید.

ب- نسبت SNR را بیابید.

ج- فرض کنید Y به یک سیستم خطی با تابع انتقال H وارد شود. بهترین تخمین خطی Y_t از طریق فیلتر Y را بدست آورید.

د- حداقل خطا MSE را پیدا کنید.

الف-

$$\text{سیستم خطی} \Rightarrow Y_{out}=X_{out}+N_{out}$$

ب-

$$S_Y=|K_1K_2|^2 S_X+|K_2|^2 S_N$$

$$SNR_{out}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |K_1K_2|^2 S_X \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_{-\infty}^{+\infty} |K_2|^2 S_N \frac{d\omega}{2\pi}}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |K_1K_2|^2 S_X\, d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |K_2|^2 S_N\, d\omega}$$

ج- حالت ساکن و مشاهده کامل تخمین برحسب فرآیند پیوسته زمان

$$\Rightarrow H=\frac{S_{XY}}{S_Y}=\frac{K_1^* K_2^* S_X}{|K_1K_2|^2 S_X+|K_2|^2 S_N}$$

د-

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty}(S_X-S_Y|H|^2)\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|K_2|^2 S_X S_N}{|K_1|^2|K_2|^2 S_X+|K_2|^2 S_N}\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_X S_N}{|K_1|^2 S_X+S_N}\frac{d\omega}{2\pi}$$

K_2 بستگی ندارد.

۴ـ ثابت کنید که $\hat{E}(\hat{E}(y|x_1,x_2,x_3)|x_1) = \hat{E}(y|x_1)$ که $\hat{E}(y|x_1)$ تخمین MS خطی است

$$\hat{E}(y|x_1,x_2,x_3) = a^T X \quad , \quad X = [x_1, x_2, x_3]^T \Rightarrow$$

$$a = R^{-1} r, \qquad R = E(XX^T) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix},$$

با فرض وینر

$$r = E(yX) = \begin{bmatrix} E(yx_1) \\ E(yx_2) \\ E(yx_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$a = R^{-1} r \Rightarrow Ra = r \Rightarrow a_1 R_{11} + a_2 R_{12} + a_3 R_{13} = r_1 \quad ①$$

$$\hat{E}[\hat{E}(y|x_1,x_2,x_3)|x_1] = \frac{E(a^T X x_1)}{E(x_1^2)} x_1 = \frac{a_1 R_{11} + a_2 R_{12} + a_3 R_{13}}{R_{11}} x_1$$

با استفاده از رابطه ① داریم که

$$\hat{E}[\hat{E}(y|x_1,x_2,x_3)|x_1] = \frac{r_1}{R_{11}} x_1 = \frac{E(yx_1)}{E(x_1^2)} x_1 = \hat{E}(y|x_1)$$

۷ـ نشان دهید که فرآیند $x_n = a x_{n-1} + w_n$ و $x_0 \sim N(0, \frac{1}{1-a^2})$ و w_n ها iid با pdf $N(0,1)$ و مستقل از x_0 باشند نشان دهید که $|\alpha|<1$ قانون ضعیف اعداد بزرگ را برآورده می‌سازد. چرا؟ $|\alpha|>1$ چطور؟

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} var(x_i) + 2\sum\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(x_i, x_j)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} var\, x_i + 2\sum\sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha^{j-i}}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} var(x_i) + 2\sum_{k=1} \alpha^k \underbrace{(n-k)}}{n^2\varepsilon^2}$$

تعداد زوجهایی که فاصله آنها برابر k است

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} var(x_i)}{n^2\varepsilon^2} + \frac{2}{n\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k \longrightarrow 0$$

$cov(x_i, x_j)$ در حل تمرین قبلی برای $x_n = a x_{n-1} + w_n$ به دست آمده بود که ثابت در صورت رابطه بجای a_1 عبارت a_1 قرار داده و ادامه دهید در شرط $|\alpha|<1$ قانون ضعیف را برآورده می‌کند اما اگر $|\alpha|>1$ باشد $\sum \frac{x_n}{n}$ واگرا یافته که به معنی عدم همگرایی احتمال گیری به یک مقدار ثابت می‌باشد.