فصل بردارها ۱۱

۱۴- فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال یکسان $f_X(x)$ در بازه (a,b) تعریف شده باشند. توزیع کوچکترین و بزرگترین X_iها را بدست آورید.

* دو روش برای حل این مسئله بیان می‌شود

روش اول: $Y_1 < Y_2 < Y_3 \ldots < Y_n$

$Y_1 = \min(X_n, \ldots, X_2, X_1)$ کوچکترین

$Y_2 =$ دومین X_i از نظر اندازه

$\vdots$

$Y_n = \max(X_n, \ldots, X_2, X_1)$ بزرگترین

ابتدا برای $n=3$ اثبات می‌کنیم این به حالت کلی تعمیم می‌دهیم به دلیل استقلال متغیرهای تصادفی:

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3) = f_X(x_1)\, f_X(x_2)\, f_X(x_3)$$

تبدیل برای این حالت به صورت زیر است.

$Y_1 = \min(X_1,X_2,X_3)$ کوچکترین، $Y_2 = (X_1,X_2,X_3)$ و اندازه وسطی، $Y_3 = \max(X_1,X_2,X_3)$ بزرگترین

برای مقادیر مختلف x_1, x_2, x_3 یکی از ۶ حالت زیر اتفاق می‌افتد

$x_1<x_2<x_3$ یا $y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3$

$x_1<x_3<x_2$ یا $y_1=x_1,\ y_2=x_3,\ y_3=x_2$

$x_2<x_1<x_3$ یا $y_1=x_2,\ y_2=x_1,\ y_3=x_3$

$x_2<x_3<x_1$ یا $y_1=x_2,\ y_2=x_3,\ y_3=x_1$

$x_3<x_1<x_2$ یا $y_1=x_3,\ y_2=x_1,\ y_3=x_2$

$x_3<x_2<x_1$ یا $y_1=x_3,\ y_2=x_2,\ y_3=x_1$

بنابراین شش جواب وجود دارد برای مثال سطر سوم:

$$y_2 = x_1,\ y_1 = x_2,\ y_3 = x_3 \Rightarrow J = \begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 1$$

و برای بقیه حالات هم ژاکوبین برابر است. بنابراین داریم که

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = 3!\, f_X(y_1)\, f_X(y_2)\, f_X(y_3) \quad a<y_1<y_2<y_3<b$$

با تعمیم مسئله به حالت کلی

$$f_{Y_1Y_2\ldots Y_n}(y_1,y_2,\ldots,y_n) = n!\, f_X(y_1)\, f_X(y_2)\cdots f_X(y_n), \quad a<y_1<y_2\ldots<y_n<b$$

و تابع چگالی احتمال کناری با انتگرال گیری نسبت به $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ بدست می‌آید:

$$f_{Y_n}(y_n) = \int_a^{y_n}\int_a^{y_{n-1}}\cdots\int_a^{y_3}\int_a^{y_2} n!\, f_X(y_1)\, f_X(y_2)\cdots f_X(y_n)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \ldots dy_{n-1}$$

و با محاسبه انتگرال داخلی

$$F_X(y_2) = \int_a^{y_2} f_X(y_1)\, dy_1$$

$$\int_a^{y_3} F_X(y_2)\, f_X(y_2)\, dy_2 = \int F_X(y)\, d(F_X(y_2)) = \frac{[F_X(y_3)]^2}{2}$$

و با تکرار همین روند

$$\boxed{f_{Y_n}(y_n) = n[F_X(y_n)]^{n-1} f_X(y_n), \quad a<y_n<b}$$

* روش دوم ... صفحه ۱۶ ...

۱- اگر متغیر تصادفی X پیوسته با CDF بصورت $F_X(x)$ باشد ثابت کنید $y = F_X(x)$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,1)$ می‌باشد.

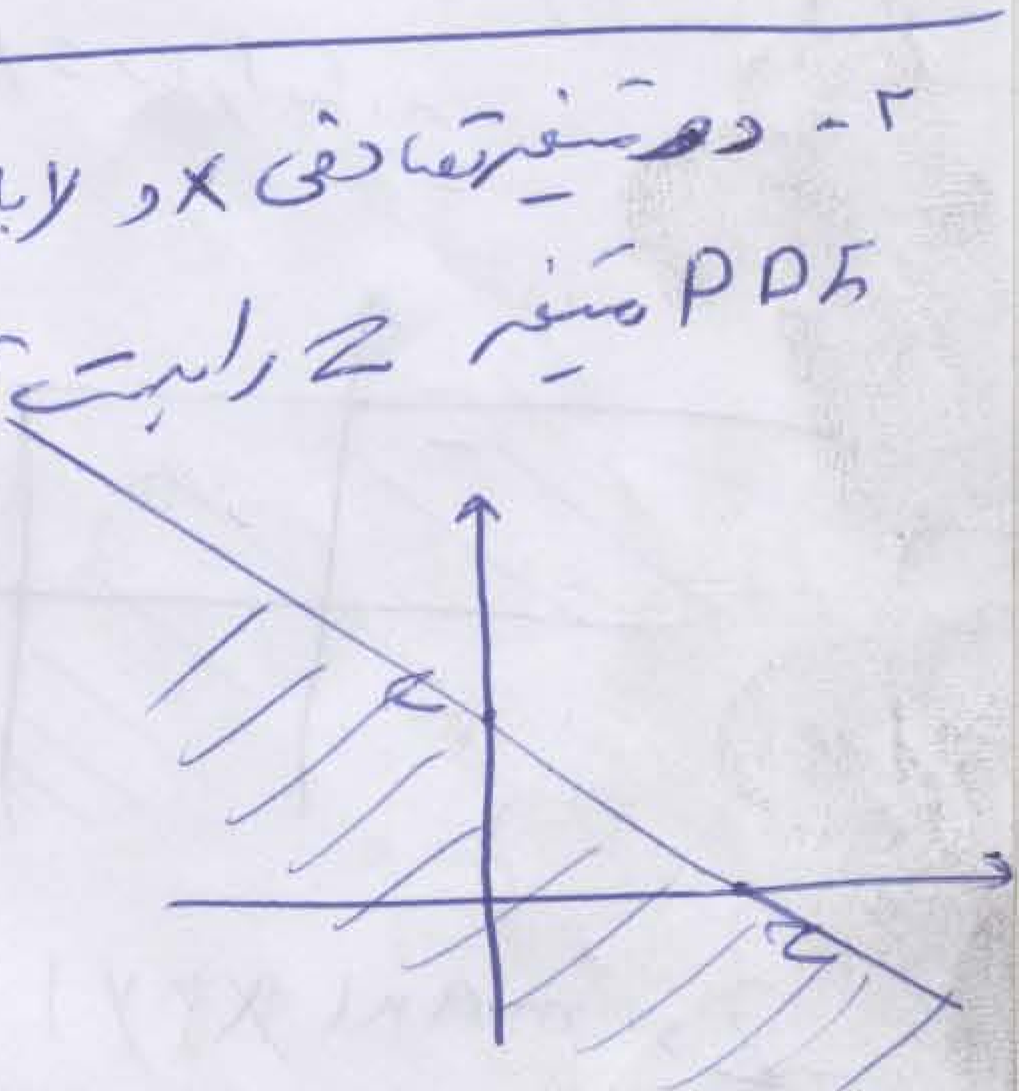
در مورد CDF می‌دانیم که $0 \le F_X(x) \le 1$ بنابراین $0 \le y \le 1$

$$y = F_X(x) \longmapsto f_Y(y) = \frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_i}} = \frac{f_X(x_i)}{\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}\Big|_{x_i}}$$

$$= \frac{f_X(x_i)}{f_X(x_i)} = 1$$

پس دارای توزیع یکنواخت در بازه 0 تا 1 می‌باشد

۲- دو متغیر تصادفی X و Y با PDF توام $f_{XY}(x,y)$ را داریم اگر $Z = X+Y$ باشد توزیع PDF متغیر Z را بدست آورید.



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx =$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy\right] dx$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx = f_Z(z)}$$

حال اگر x و y مستقل باشند در اینصورت

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z-y)\, dy = f_Y(y) * f_X(x)$$

۳- اگر X و Y دو متغیر تصادفی با PDF توام $f_{XY}(x,y)$ باشند تابع PDF $Z = XY$ (و $Z = X/Y$) را مشخص کنید

$$Z = XY,\quad W = X \Rightarrow J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{w} & -\frac{z}{w^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{w}$$

$$f_{ZW}(z,w) = \left|\frac{1}{w}\right| f_{XY}\left(w, \frac{z}{w}\right) \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = \int f_{ZW}(z,w)\, dw = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{w}\right| f_{XY}\left(w, \frac{z}{w}\right) dw = f_Z(z)}$$

و اما برای $Z = X/Y$ داریم:

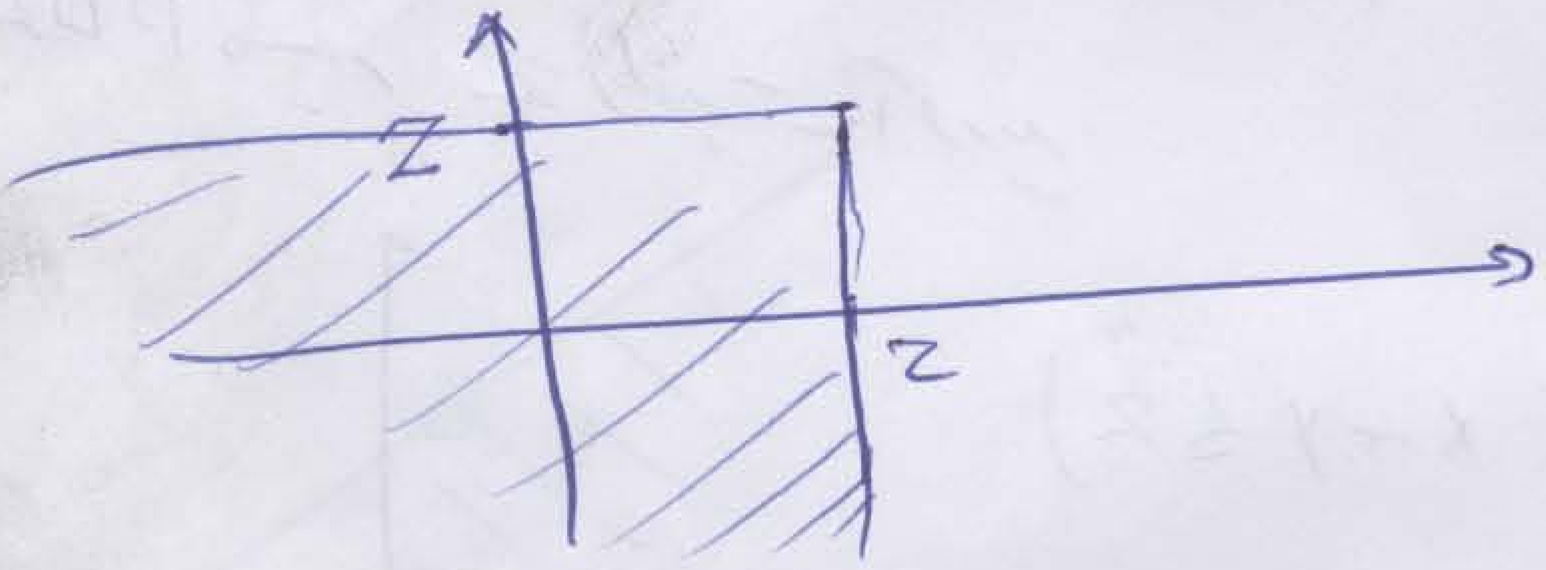
$$Z = X/Y \,,\; W = Y \Rightarrow x = zw \;,\; w = y$$

$$\Rightarrow J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w \Rightarrow$$

$$f_{ZW}(z,w) = |w| f_{XY}(zw, w) \Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw$$

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{+\infty} |w| f_{XY}(zw, w)\, dw = f_Z(z)}$$

۴- اگر X و Y دو متغیر تصادفی با PDF توأم $f_{XY}(x,y)$ و CDF توأم $F_{XY}(x,y)$ باشند در اینصورت CDF متغیرهای $Z = \max(X,Y)$ و $W = \min(X,Y)$ را بیابید



$$Z = \max(X,Y) \Rightarrow F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\max(x,y) \le z)$$

$$= P(X \le z, Y \le z) = F_{XY}(z,z) = F_Z(z)$$

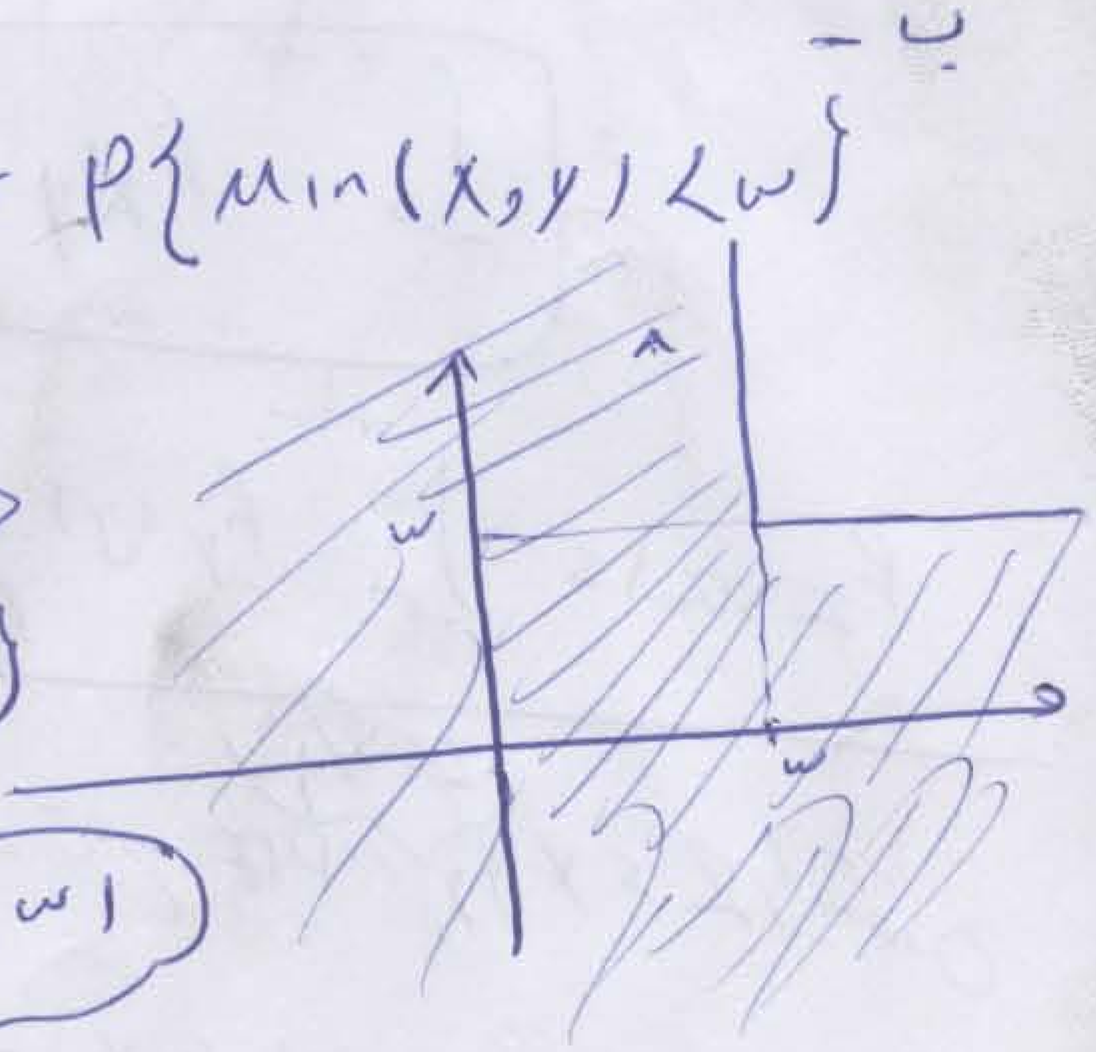
و اگر مستقل باشند

$$F_Z(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

ب -

$$W = \min(X,Y) \Rightarrow F_W(w) = P\{W \le w\} = P\{\min(X,Y) \le w\}$$

$$= P\{\{X \le w\} \cup \{Y \le w\}\} \Longleftrightarrow$$



$$= P\{X \le w\} + P\{Y \le w\} - P\{\{X \le w\} \cap \{Y \le w\}\}$$

$$= F_X(w) + F_Y(w) - F_{XY}(w,w) = F_W(w)$$

(14) (A)