(1)

نام خانوادگی ....

شماره کارت دانشجویی ....

نمونه سوالات حل شده I مبحث: تخمین و آشکارسازی

تهیه: م. بیات

۱ـ با فرض یک متغیر تصادفی مانند X، رابطه زیر را ثابت کنید:

$$E[(X-c)^2] = Var(X) + (c - E[X])^2 , \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

بنابراین اگر بخواهیم X را با یک عدد ثابت تقریب بزنیم طوری که $c \in \mathbb{R}$ و خطای مربع متوسط $E[(X-c)^2]$ حداقل شود، جواب بهینه c برابر است با $E[X]$

حل:

$$\mu_X = E[X] \qquad E[(X-c)^2] = E[(X-\mu_X+\mu_X-c)^2]$$

$$= E[(X-\mu_X)^2] + (\mu_X - c)^2 + 2(\mu_X - c)E[X-\mu_X]$$

$$= Var[X] + [c - E(X)]^2 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

2ـ فرض کنید X، Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم باشند. می‌خواهیم مثلاً X را توسط یک تابع خطی از روی Y تقریب بزنیم. یعنی می‌خواهیم $a, b \in \mathbb{R}$ را طوری بیابیم که مربع خطای متوسط زیر حداقل شود

$$E[(X - (a.Y+b))^2]$$

b، a را بیابید.

حل:

$$f(a,b) = E[(X - (a.Y+b))^2]$$

f تابعی غیرمنفی و پیوسته از a، b است:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = -2E[(X-aY-b)Y] = 0$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{E[XY] - bE[Y]}{E[Y^2]} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = -2E[(X-a.Y-b)] = 0$$

$$b = E[X] - aE[Y] = E[X] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)} \times E[Y]$$

3ـ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم باشند. می‌خواهیم X را توسط تابعی (نه لزوماً خطی) از Y طوری تقریب بزنیم که متوسط مربع خطای زیر حداقل شود

$$E[(X - g(Y))^2]$$

با استفاده از تعریف امید شرطی نشان دهید $g(Y)$ بهینه برابر است با $E[X|Y]$

نام خانوادگی ....

شماره کارت دانشجویی ....

حل: از تعریف امید شرطی داریم: $E[g(Y)(X-E[X|Y])]=0, \forall g(Y)$

با قرار دادن $g(Y)=E[X|Y]$

$E[E[X|Y](X-E[X|Y])]=0$ $\quad$ $E[XE[X|Y]]=(E[X|Y])^2$

حال داریم:

$$
\begin{aligned}
E[(X-g(Y))^2] &= E[((X-E[X|Y])-(g(Y)-E[X|Y]))^2] \\
&= E[(X-E[X|Y])^2]+E[(g(Y)-E[X|Y])^2] \\
&\quad -2E[(X-E[X|Y])(g(Y)-E[X|Y])] \\
&= E[(X-E[X|Y])^2]+E[(g(Y)-E[X|Y])^2] \\
&\quad -2E[g(Y)(X-E[X|Y])]+2E[E[X|Y](X-E[X|Y])] \\
&= E[(X-E[X|Y])^2]+E[(g(Y)-E[X|Y])^2]
\end{aligned}
$$

بنابراین در بین تمام توابع Y بهترین تخمین X بر حسب Y ها $E[X|Y]$

4- با استفاده از توابع چگالی احتمال توأم روابط زیر را اثبات کنید.

(a) $E[g(Y)h(X)|Y]=g(Y)E[h(X)|Y]$

(b) $E[E[X|Y]]=E[X]$ $\quad$ (قانون احتمال کل)

(c) $E[E[X|Y,Z]|Y]=E[X|Y]$ $\quad$ (امید شرطی تکراری)

(d) $E[X|Y]=E[X]$ if X, Y are independent

حل:

(a): $E[g(Y)h(X)|Y]=g(Y)E[h(X)|Y]$

$$E[g(Y)h(X)|Y]=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x)f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$=g(y)\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$=g(y)E[h(X)|Y]$$

فرض کنید p یک تابع دلخواه از Y باشد داریم: $E[p(Y)g(Y)h(X)]=E[p(Y)E[g(Y)h(X)|Y]]$

نام خانوادگی ....

شماره کارت دانشجویی ....

(b) $E[E[X|Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx \right) f_Y(y)\, dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, f_X(x)\, dx\, dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, d\, dy \right) dx$

$= E[X]$

(c)

$E[E[X|Y,Z]|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx \right.$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = E[X|Y]$

(d) $E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = E[X]$

نام خانوادگی ....

شماره کارت دانشجویی ....

۵- کانال مخابراتی مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید

$$X \in \{0,1\} \longrightarrow \boxed{\text{یک تابع غیرخطی } \; p_{Y|X}(y|x)} \longrightarrow Y$$

داریم:

$$p_{Y|X}(y|X=0) = \frac{y}{2} \qquad y \in [0,2]$$

$$p_{Y|X}(y|X=1) = 3y^2 \qquad y \in [0,1]$$

a) فرم تابع نسبت درستنمایی را بیابید.

b) قاعده تصمیم‌گیری بیابید که با توجه به شرط $P(1 \text{ آشکارسازی} | X=0) = 0.05$ احتمال $P(0 \text{ آشکارسازی} | X=1)$ را حداقل سازد.

c) نمودار خطای تصمیم‌گیری در مورد دو مقدار ورودی 0 و 1 را رسم کنید.

d) فرض کنید احتمال پیشین $X=0$ برابر $2/3$ باشد. قاعده تصمیم‌گیری را بیابید که احتمال خطا را حداقل سازد.

حل: نسبت درستنمایی برابر است با

a)

$$\frac{p_{Y|X}(y|X=1)}{p_{Y|X}(y|X=0)} = \begin{cases} 6y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$$

بنابراین قاعده تصمیم‌گیری به شکل زیر خواهد بود:

$$\hat{X} = 1 \quad \text{iff} \quad \Lambda \le y \le 1$$

که Λ یک عدد غیرمنفی است.

b) برای یافتن قاعده‌ای که با شرط $P(1 \text{ آشکارسازی} | X=0) = \epsilon$ داده شده، $P(0 \text{ آشکارسازی} | X=1)$ را حداقل کند باید Λ را طوری انتخاب کرد که $P(1 \text{ آشکارسازی} | X=0) = \epsilon$ شود.

نام خانوادگی ....

شماره کارت دانشجویی ....

$P(1 \text{ آشکارسازی} | X=0) = P(\Lambda \le Y \le 1 | X=0) = \int_{\Lambda}^{1} p_{Y|X}(y|X=0)\,dy$

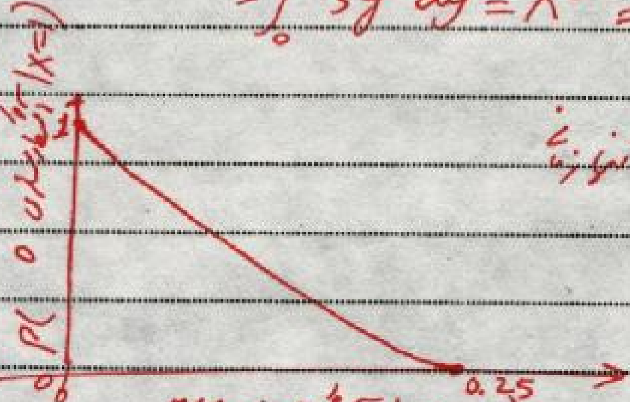
$= \int_{\Lambda}^{1} \frac{y}{2}\,dy = \frac{1-\Lambda^2}{4}$

بنابراین اگر $0 \le \epsilon < 1$ باشد شرط $P(1 \text{ آشکارسازی} | X=0) = \epsilon$ با قرار دادن $\Lambda = \sqrt{1-4\epsilon}$ برآورده می‌شود. در این حالت قاعده بهینه جهت آشکارسازی $\hat{x}=1$ زمانی است که $\sqrt{1-4\epsilon} \le y \le 1$ باشد. به عبارت دیگر برای $\epsilon = 0.05$ باید داشته باشیم $\Lambda = 0.89$ و قاعده بهینه جهت انتخاب $\hat{x}=1$ به صورت $0.89 \le y \le 1$ است.

c) با توجه به قاعده بهینه به دست آمده، منحنی [illegible] برای $0 \le \epsilon \le 1/4$ داریم:

$P(0 \text{ آشکارسازی} | X=1) = P(0 \le Y < \Lambda | X=1) = \int_0^{\Lambda} p_{Y|X}(y|X=1)\,dy$

$= \int_0^{\Lambda} 3y^2\,dy = \Lambda^3 = (1-4\epsilon)^{3/2}$



d) با اعمال قاعده MAP، $\hat{x}=1$ زمانی انتخاب می‌شود که

$\frac{1}{3} p_{Y|X}(y|X=1) \ge \frac{2}{3} p_{Y|X}(y|X=0)$

$y^2 \ge y/3$

$y \in [0,1]$ $\quad y \in [0,2]$

با در نظر گرفتن این که $y=0$ (احتمال آن صفر است) قاعده تصمیم‌گیری به صورت $\hat{x}=1$ به عبارت $1/3 \le y \le 1$ در می‌آید