حل تمرين سري اول فرآيندهاي اتفاقي

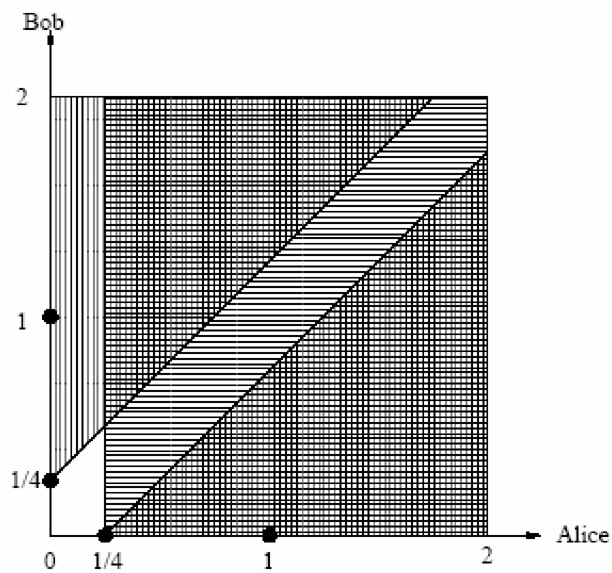
۱- الف: **x** و **y** بطور مستقل و يكنواخت از مجموعه **[0,2]** انتخاب مي شوند. پيشامدهاي زير را در نظر بگيريد:

پيشامد **A**: $|x-y|>1/4$

پيشامد **B**: $x>1/4$

مطلوبست محاسبه $\mathbf{P}(A\cap B)$.

مناطقي كه پيشامد A را نشان مي دهند با خطوط عمودي و مناطقي كه پيش آمد B را نـشان مي دهند با خطوط افقي نشان داده شده اند.



طبيعي است نقاطي كه مشترك هستند همپوشاني داشته و

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A\cap B) &= \frac{\text{Double shaded area}}{\text{Total shaded area}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{4}\right)^2}{4}\\ &= \frac{85}{128}.\end{aligned}$$

ب: اگر در ظرفي m مهره قرمز و n مهره مشكي وجود داشته باشد و ۲ مهـره بـه تـصادف انتخـاب شـود احتمال اينكه همرنگ نباشند را بدست آوريد.

اگر B_1 مهره اول و B_2 مهره دوم باشد در اينصورت :

P(همرنگ نبـودن) = P(مهـره اول قرمـز)* P (مهـره دوم مـشكي | مهـره اول قرمـز)+ P(مهـره اول مشكي)* P (مهره دوم قرمز | مهره اول مشكي) =

$$\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\times\frac{m}{m+n-1}$$
$$\frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

ج: دو لامپ A و B را داريم طول عمر لامپ A، ۴ روز و طول عمر لامپ B، ۶ روز مـي باشـد اگـر يـك لامپ را بطور تصادفي انتخاب كنيم. با فرض اينكه كاركرد لامپ بيش از ۱۲ ساعت باشد احتمـال اينكـه لامپ A انتخاب شده باشد چقدر است. لامپها مشابه بوده و توزيع آنها نيز نمايي است .

جواب:

$$\mu_A=\frac{1}{\lambda_A}=4 \quad\Rightarrow\quad \lambda_A=\frac{1}{4} \qquad f_A(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{-1}{4}x}u(x)$$
$$\mu_B=\frac{1}{\lambda_B}=6 \quad\Rightarrow\quad \lambda_B=\frac{1}{6} \qquad f_B(x)=\frac{1}{6}e^{\frac{-1}{6}x}u(x)$$

اگر E پيشامد انتخاب A باشد در اينصورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E\,|\,X\ge\tfrac{1}{2}) &= \frac{\mathbf{P}(E)\cdot\mathbf{P}(X\ge\frac{1}{2}\,|\,E)}{\mathbf{P}(X\ge\frac{1}{2})}\\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{-\lambda_A\cdot\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}e^{-\lambda_A\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\lambda_B\cdot\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{1}{24}}}\end{aligned}$$

۲- اگر A و B پيشامدهاي يك فضاي برداري باشند احتمالات زير را بر حسب $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\ and\ \mathbb{P}(A\cap B)$ **بيان كنيد:**

الف- احتمال اينكه حداقل يكي از پيشامدهاي A يا B رخ دهد.

ب- احتمال اينكه واقعاً يكي از پيشامدهاي A يا B رخ دهد.

$$\mathbb{P}(A \text{ or } B)=\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

ب-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \text{ xor } B) &= \mathbb{P}\Big((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\Big)=\mathbb{P}(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)\\ &= 1-\mathbb{P}(A^c\cup B)+1-P(A\cup B^c)\\ &= 1-\Big(1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A^c\cap B))\Big)+1-\Big(1-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B^c\cap A))\Big)\\ &= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)\\ &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

۳-يك راننده در خيابان رانندگي مي كند. در زمان t=0 با احتمال $p\in[0,1]$ **در سمت چپ رانندگي را شروع مي كند. در بازه هاي زماني t=1,2,3,… بطور تصادفي با احتمال p به سمت ديگر سـوئيچ مـي كند(از سمتي كه در زمان t-1 قرار داشته است). اگر p_t احتمال اينكه در لحظه t در سمت راست باشد.**

الف: رابطه بازگشتي p_t را بر حسب p_{t-1} و p بيان كنيد.

ب: نشان دهيد كه: $P_t = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^{t+1}\right]$

اگر در لحظه t-1 در سمت چپ باشد (پيشامدي كه با احتمال $1 - P_{t-1}$ رخ مي دهد) پس بـا احتمـال p سوئيچ مي كند. بطور مشابه اگر در لحظه t-1 در سمت راست باشد، با احتمال p در همان راستا ادامـه مي يابد. بنابراين

$$P_t = p(1 - P_{t-1}) + (1-p)P_{t-1} = (1-2p)P_{t-1} + p$$
$$P_0 = 1 - p.$$

ب- با استفاده از قضيه استقراء

در لحظه t=1 $P_0 = 1 - p$ و $P_1 = (1-2p)P_0 + p = 1 + 2p - 2p^2 = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)\right]$

حال با فرض اينكه در لحظه t برقرار باشد براي t+1 رابطه را اثبات مي كنيم:

$$P_t = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^{t+1}\right]$$
$$P_{t+1} = (1-2p)P_t + p = \frac{1}{2}\left[1 - 2p + (1-2p)^{t+2}\right] + p = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^{t+2}\right]$$

توزيعهاي تصادفي:

۴- اگر **x** داراي توزيع گاما با **pdf** زير باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

كه در آن $\alpha > 0 \text{ and } \lambda > 0$ و

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \qquad \alpha > 0$$

نشان دهيد كه:

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad \alpha > 0$
2. $\Gamma(k+1) = k! \qquad k\ (\geq 0)$: integer
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

جواب:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$
$$\Gamma(\alpha) = -e^{-x}x^{\alpha-1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$
$$= (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-2}\,dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

با جاي گذاري α با $\alpha + 1$ در رابطه بالا قسمت ۱ ثابت مي شود.

ب- $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)\Gamma(k-1) = k(k-1)\cdots(2)\Gamma(1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 \qquad \Gamma(k+1) = k!$$

ج- با تغيير متغير $y = x^{1/2}$ داريم:

$$dy = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}\,dx$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

۵- متوسط و واريانس توزيع رايلي را پيدا كنيد

$$\mu_X = E(X) = \int_0^\infty x\,\frac{x}{\sigma^2}\,e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

مي دانيم كه واريانس توزيع گوسي داراي رابطه زير مي باشد:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \sigma^2$$

چون تابع زير انتگرال تابعي زوج است:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}\sigma^2$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\sigma^3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma^3$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma^3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma$$

ب- محاسبه واريانس

با تغيير متغير $y = x^2/(2\sigma^2)$. Then $dy = x\,dx/\sigma^2$.

$$E(X^2) = 2\sigma^2\int_0^\infty y e^{-y}\,dy = 2\sigma^2$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \approx 0.429\sigma^2$$

۶- ثابت كنيد كه توزيع پواسون تقريبي از توزيع binomial است وقتيكه **n** بزرگ و **p** كوچك باشد.

$$p_X(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\,p^k(1-p)^{n-k}$$

با تقسيم کردن بر n داریم

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}(np)^k\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-k}$$

با فرض $n \to \infty$ و $np = \lambda$ به سمت مقدار ثابتي شود.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}(1) = e^{-\lambda}$$

بنابراين

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad np = \lambda$$

۷- براي توزيع نرمال با پارامترهاي $X = N(0;\sigma^2)$. مقادير $E(X\mid X>0)$ and $\mathrm{Var}(X\mid X>0)$ را حساب كنيد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$f_X(x\mid X>0) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{f_X(x)}{\int_0^\infty f_X(\xi)\,d\xi} = 2\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$E(X\mid X>0) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^\infty xe^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

با فرض $y = x^2/(2\sigma^2)$. داریم:

$$E(X^2\mid X>0) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^\infty x^2e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx = \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

و مقدار واريانس برابر است با:

$$\mathrm{Var}(X\mid X>0) = E(X^2\mid X>0) - [E(X\mid X>0)]^2$$
$$= \sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.363\,\sigma^2$$